Reto Barceló #2

Roberto Barceló

3/1/2018

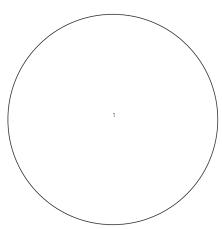
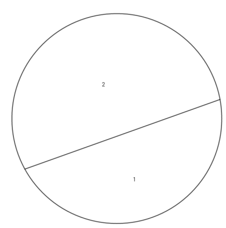
1 Solución

Empecemos dando la respuesta al reto. El siguiente término de la sucesión puede ser ... ¡cualquiera! Veamos como justificar este resultado. Comencemos analizando la siguiente sucesión:

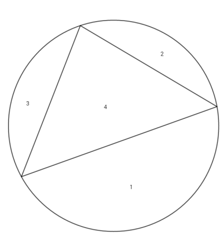
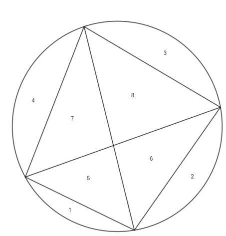
$$1, 2, 4, 8, 16, \text{ ¿?}$$

A la mayoría de vosotros, por no decir al 99,99%, se os habrá venido a la cabeza el 32. Estamos ante una sucesión en la que cada término parece surgir de multiplicar el término anterior por 2. Pero, ¿qué pensaríais si os dijese que el término siguiente es ... ¡31!?

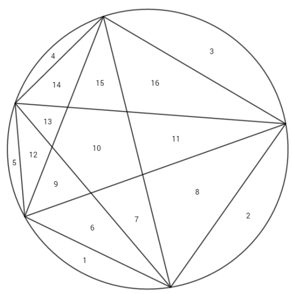
Veamos como justificarlo. Dibujemos un círculo y escojamos dos puntos de la circunferencia unidos por un segmento, ¿en cuántas partes ha quedado dividido el círculo? Originalmente teníamos un círculo completo y, tras este primer paso, tenemos un círculo dividido en dos partes.

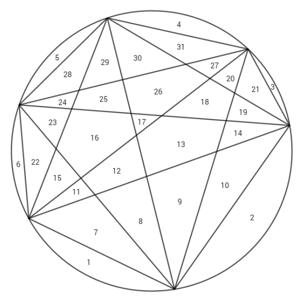



Si ahora elegimos otro punto y lo unimos con los anteriores obtenemos 4 partes. Otro más y obtenemos 8.

Seguimos con el proceso y obtenemos 16. Pero, ¿qué pasa si añadimos un punto más? Pues que no surgen 32 partes, sino ¡31!. A contar se ha dicho:





Hay quien podría pensar que este forma de justificar la secuencia de números es más "enrevesada" que la de multiplicar por 2. Sin embargo, con los círculos solo tenemos que saber contar, una operación más básica, si se quiere, que la de multiplicar. Por tanto, el sentido estético, la sencillez, etc. parecen no ser una guía fiable a la hora de encontrar la lógica de una sucesión.

Y viendo que hay dos justificaciones igualmente válidas para esta sucesión, ¿quién nos asegura que no hay más? Podríamos por ejemplo dar una justificación que fuese: "los cinco primeros términos son 1, 2, 4, 8, 16, y a partir de ahí todos cero". Os puede parecer absurda pero es igualmente válida. Por tanto, parece que no hay forma de tener suficiente información para justificar la sucesión de forma única.

Centrémonos ahora en la sucesión numérica del reto y analicemos algunas de las soluciones que habéis mandado (sabiendo ya que cualquiera podría ser igualmente válida, incluso algunas que podrían parecer absurdas, si se quiere):

$$1, 2, 6, 42, 1.806,\ \ ¿?$$

La respuesta que habéis dado la gran mayoría ha sido: 3.263.442. Este resultados se puede obtener de diferentes maneras, aunque todas ellas son equivalentes (hay más de las que indico):

- Multiplicar cada número por su siguiente.
- Elevar cada término al cuadrado y sumarle dicho término.
- $a_n = a_{n-1} * (a_{n-1} + 1)$
- $a_n = a_{n-1}^2 + a_{n-1}$
- $a_n = 1 + \sum_{j=0}^{n-1} j^2$ donde n representa la posición del término de la sucesión que queremos hallar.

Sin embargo, y especialmente después de la pista que dio Javier, muchos de vosotros caísteis en otra posible solución: multiplicar cada término por su siguiente número primo. En el caso del 1, su siguiente número primo es el 2, del 2 es el 3, del 6 el 7, del 42 el 43, pero del 1.806 no es el 1.807, que no es primo (es $13 * 139$), sino el 1.811. Por tanto, utilizando esta lógica, la respuesta sería $1.806 * 1.811 = 3.270.666$.

Otra solución, esta vez muy minoritaria, ha sido 1.117.914. Como comentamos en la primera solución, cada término aparecía multiplicando el anterior por su siguiente (o por su siguiente número primo, según la segunda solución aportada en este documento, pues hasta 1806 ambas formulaciones son coincidentes). Estos multiplicadores son (2, 3, 7 y 43), cuya diferencia entre dos términos consecutivos es, respectivamente, (1, 4 y 36), que a su vez coinciden con los cuadrados de (1, 2 y 6), los cuales se pueden escribir como (1!, 2! y 3!). De esta forma, la fórmula para estos multiplicadores sería[1,2,3]:

$$1 + \sum_{j=0}^{n-2} (j!)^2$$

Veamos el resultado de aplicar dicha fórmula:

$$\begin{array}{rcr}
1 \quad + (0!)^2 = 2 & \rightarrow & 1 * 2 = 2 \\
1 \quad + (0!)^2 + (1!)^2 = 3 & \rightarrow & 2 * 3 = 6 \\
1 \quad + (0!)^2 + (1!)^2 + (2!)^2 = 7 & \rightarrow & 6 * 7 = 42 \\
1 \quad + (0!)^2 + (1!)^2 + (2!)^2 + (3!)^2 = 43 & \rightarrow & 42 * 43 = 1806 \\
1 \quad + (0!)^2 + (1!)^2 + (2!)^2 + (3!)^2 + (4!)^2 = 619 & \rightarrow & 1.806 * 619 = 1.117.914
\end{array}$$

Otra solución bastante original y que arroja como resultado 2.940.042 es:

$$1 \ \ 2 \ \ 6 \ \ 42 \ \ 1806$$

$$12 : (2 : 1) = 12 : 2 = 6$$

$$126 : (6 : 2) = 126 : 3 = 42$$

$$12.642 : (42 : 6) = 12.642 : 7 = 1.806$$

$$126.421.806 : (1.806 : 42) = 12.6421.806 : 43 = 2.940.042$$

En este caso hemos ido componiendo números con los términos de la sucesión, dividiéndolos por fracciones formadas a partir de los dos términos anteriores al término considerado para hallarlo.

Por último, algunos de vosotros, quizás con más conocimientos matemáticos, habéis mandado otras respuestas. De entre todas ellas podemos destacar las relacionadas con interpolación numérica, o las relacionadas con algoritmos de programación (que seguramente contienen un código basado en interpolación numérica), pero que escapan al nivel al que se presentan estos retos. Usando interpolación numérica podemos encontrar una justificación

[1] Existen otras formas de hallar estos multiplicadores, pero expondremos únicamente esta.
[2] En el sumatorio, n representa la posición del término de la sucesión.
[3] El símbolo ! indica el factorial. Por ejemplo: $6! = 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1$.

(o más bien fórmula en este caso) para cualquier valor que continúe la sucesión. Así que, de nuevo, la respuesta al reto era ¡cualquiera! y, por supuesto, había que exponerla con una justificación para que fuese válida.

En cualquier caso, hayáis acertado o no, quiero agradeceros la participación masiva. Me leo todos los correos que mandáis, que en esta segunda ocasión han sido más de 500. No puedo responderos a todos porque me sería imposible, pero los leo con entusiasmo y sorpresa al comprobar que hay tantísima gente con inquietud hacia estos temas. Mi enhorabuena a todos.

2 Ampliación

Existen otras justificaciones para esta sucesión y sobre las cuales podemos encontrar, en la actualidad, artículos de investigación. Entre otras:

- Son números primarios semiperfectos. N es un número primario semiperfecto si satisface la condición de fracción egipcia:

  $$\sum_{p \mid N} \frac{1}{p} + \frac{1}{N} = 1$$

  donde la suma es solamente sobre los factores primos de N. En esta caso el siguiente término sería 47058.

- Los multiplicadores que mencionamos anteriormente (2, 3, 7, 43, 1807, 3.263.443, ...) pertenecen a la sucesión de Sylvester. En este caso el siguiente término de la sucesión coincidiría con el primer resultado dado (3.263.442).

- También se pueden relacionar estos números con el falso pequeño teorema de Fermat y las variedades de Calabi-Yau.

¡Fijaos que cantidad de justificaciones para una misma sucesión de números! ¡Ya podían haber elegido estos números para la secuencia de Lost (Perdidos)![4].

En cuanto a la relación con otras ramas del conocimiento, encontramos que el filósofo Ludwig Wittgenstein en sus obras *Investigaciones filosóficas* y *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática* reflexionó de forma amplia y general sobre el problema de las diferentes continuaciones posibles de una sucesión, relacionándolo con la semántica, la lógica, la filosofía de las matemáticas y la filosofía de la mente. Todo ello abre un sin fin de conexiones muy interesantes de estudiar y que son tema de investigación en la actualidad.

En lo relacionado con la literatura y el cine encontramos obras que tratan sobre este tema y que recomiendo:

[4] Los números 4, 8, 15, 16, 23 y 42 son uno de los temas recurrentes y más importantes de Lost

- *La muerte y la brújula* de Jorge Luis Borges.
- *Acerca de Roderer* de Guillermo Martínez.
- *Los crimenes de Oxford* de Álex de la Iglesia.

Para terminar, me gustaría hacer una reflexión acerca de los test de inteligencia, especialmente sobre aquellos que incluyen sucesiones lógicas que hay que continuar en una casilla en blanco. Como acabamos de ver, la continuación de estas sucesiones no es única, y existen lógicas muy dispares, pero igualmente válidas, que arrojan resultados distintos. De esta forma, lo que se mide en este tipo de test es la adaptación de la persona evaluada a la continuación "esperable" en función de su edad, formación, entrenamiento previo, etc. En definitiva, evaluar la coincidencia o desviación respecto de la solución prevista *a priori* como correcta. Sin embargo, ¿no son precisamente los genios las personas con creatividad suficiente para encontrar respuestas que nadie esperaba a problemas ya resueltos o que aún están sin resolver?